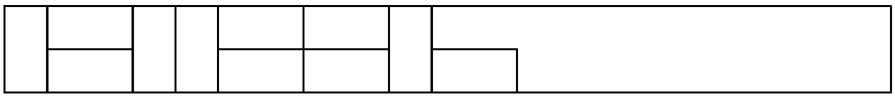
Suites récurrentes

Toutes vos questions et remarques sont bienvenues ! Mon adresse est `antonin.delpeuch@ens.fr`. Vous pouvez retrouver les sujets et leurs corrigés sur ma page personnelle :
`http://antonin.delpeuch.eu/maple`.

1 Récurrer le carrelage

On considère un rectangle $2 \times n$ qu'on veut paver avec des carreaux 2×1 et 1×2.



✤ **Question 0** Combien existe-t-il de pavages du rectangle $2 \times n$?

2 Comptons les lapins

✤ **Question 1** Écrire une fonction récursive `pavages` qui calcule le nombre de pavages que vous avez défini.

Testez votre fonction sur de petits exemples.

✤ **Question 2** Quelle est la complexité de votre fonction ?

Bonus : cherchez l'expression exacte du nombre d'appels de la fonction `pavages`.

✤ **Question 3** Écrivez une fonction `fibonacci` plus efficace que `pavages`.

Bonus : cherchez une version itérative et une version récursive.

3 Votre fidèle compagnon : le calcul matriciel

La suite de Fibonacci est un cas particulier de **suite récurrente linéaire**. Une suite vérifiant une relation de la forme

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$$

est dite **récurrente linéaire d'ordre p**.

Pour une telle suite, on définit une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ comme suit :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

✤ **Question 4** Comment calculer U_{n+1} à partir de U_n ?

✤ **Question 5** Écrire une procédure qui calcule U_{n+k} en fonction de U_n et k.

✤ **Question 6** En déduire une nouvelle version de la fonction `fibonacci`. Quelle est sa complexité ?

4 Puissance et rapidité

Tout revient donc à calculer A^n efficacement. Vous avez évoqué en cours l'algorithme d'exponentiation rapide. Cet algorithme est encore valable dans le cas matricel.

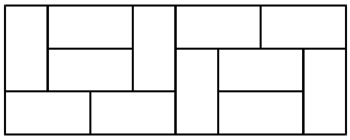
Question 7 Écrire une fonction `exprap` qui calcule la puissance `k` d'une matrice `A`

5 Vous êtes donc vraiment rapide...

On peut généraliser la méthode de l'exponentiation rapide à d'autres problèmes.

Question 8 Quelle est la propriété du produit nécessaire pour que cela fonctionne ?

On considère une variante de notre problème de pavage : le rectangle à paver est de taille $3 \times 2n$.



Question 9 Comptez le nombre de pavages pour cette variante.

Question 10 Comment adapter la méthode matricielle à ce cas ?

6 Garde fou : Centrale 2012 PC

Question 11 *Oral avec Maple.*

Soient $f : x \mapsto x^2 - 8 + \frac{12}{x}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer les premiers termes de cette suite pour quelques valeurs de a. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite ?
2. Tracer les graphes de f et de $x \mapsto x$.
3. On suppose que $a \in [\sqrt{7} - 1, 2[$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.
   (a) Trouver g telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$.
   (b) Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{x}$ quand $x \to 0$. En déduire un équivalent de v_n.
   Quelle est la nature de la série de terme général v_n^2 ?

Question 12 *Oral sans Maple, mais c'est dans notre sujet...*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose que $u_0 > 0$. Donner un équivalent de u_n. En déduire la nature de la série de terme général u_n^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. On suppose $u_0 < 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $|u_n|^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.