

Approximation numérique

Toutes vos questions et remarques sont bienvenues! Mon adresse est `antonin.delpauch@ens.fr`. Vous pouvez retrouver les sujets et leurs corrigés sur ma page personnelle : <http://antonin.delpauch.eu/maple>.

1 Polynômes de Lagrange

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des polynômes interpolateurs de Lagrange vers une fonction cible.

On fixe $a_0, \dots, a_n \in [-1; 1]$. Les polynômes de Lagrange $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont définis par

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On pose

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + 25x^2}$$

✿ **Question 1** Calculer (en fonction de n) les L_k pour des a_k équirépartis : $a_k = -1 + \frac{2k}{n}$

✿ **Question 2** Calculer l'unique polynôme P tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(a_i) = f(a_i)$

✿ **Question 3** Faire varier n . On pourra utiliser la commande `plot[animate]` pour faire une jolie animation de la « convergence » vers f

✿ **Question 4** Calculer $\|f - P\|_\infty$ pour différents n

2 Minimisation et recherche de zéros

Le but de cet exercice est d'étudier trois méthodes de recherche d'extrema ou de zéros.

2.1 Recherche dichotomique

Soit $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $g(x_0) = 0$ et g est croissante au voisinage de x_0 .

✿ **Question 5** Montrer que $a_n \rightarrow x_0$ et $b_n \rightarrow x_0$

✿ **Question 6** Écrire une procédure qui approxime x_0 par recherche dichotomique

✿ **Question 7** Comment utiliser cet algorithme pour trouver une valeur approchée de la solution strictement positive de l'équation $x^2 = \text{Arctan}(x)$ (notée α dans la suite)?

2.2 Descente de gradient

Supposons qu'on cherche le minimum d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 (s'il existe).

La méthode de descente de gradient consiste à descendre le long de la courbe dans le sens opposé au gradient : $u_{k+1} = u_k - \eta \text{grad } f(u_k)$. Dans la suite, on se restreint aux fonctions réelles à une variable réelle ($d = 1$).

✿ **Question 8** Écrire une procédure qui, avec les arguments f , u_0 , η et N calcule u_N

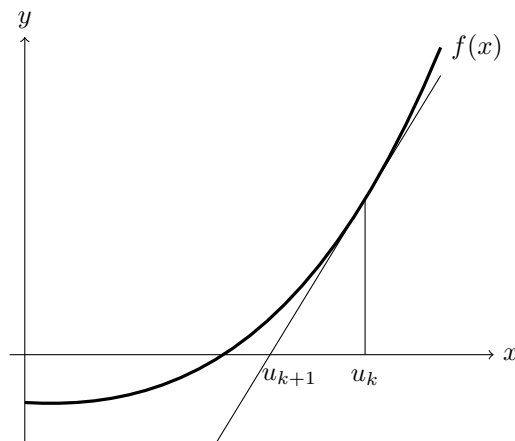
✿ **Question 9** Avec cette méthode, rechercher le minimum de $x^2 - \text{Arctan}(x)$ sur \mathbb{R} . Essayer différentes valeurs de u_0 , η et de N

✿ **Question 10** Adapter cette méthode pour estimer α

Comparer les résultats avec ceux de la commande `fsolve`.

2.3 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton permet, sous des conditions de régularité, de trouver un zéro d'une fonction. On peut la représenter graphiquement :



✿ **Question 11** Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k pour la méthode de Newton

✿ **Question 12** Écrire une procédure qui, avec les arguments adéquats, calcule v_N

✿ **Question 13** Combien d'itérations faut-il exécuter pour obtenir une valeur aussi précise que celle de `fsolve`? Comparer avec les autres méthodes.

2.4 Vitesse de convergence

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a; b]$, que $f' > 0$ et que $f(a)f(b) < 0$.

On pose $m = \inf_{[a;b]} f'$ et $M = \sup_{[a;b]} f''$. (sont ils bien définis?)

On note x le zéro de f (existe-t-il et est-il unique?).

On pose

$$\phi(u) = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

✿ **Question 14** Montrer que pour tout $u \in [a; b]$ il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\phi(u) - x = \frac{f''(u)}{f'(u)} \frac{(u-x)^2}{2}$$

✿ **Question 15** En déduire une majoration de $|\phi^n(u) - x|$. Comparer la vitesse de convergence de la méthode de Newton avec la dichotomie