

TP n° 5 : La première preuve de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins un admet une racine dans \mathbf{C} . Comme nous ne sommes pas des Gauss, nous allons expérimenter avant de démontrer.

Le but pédagogique de ce TP n'est pas de programmer. Il s'agit de se servir des capacités de Maple pour expérimenter. Une grande place est donc laissée pour les essais et les erreurs. Les principales commandes Maple utiles seront *plot*, *implicitplot*, *expand*, *assume*, ainsi que bien d'autres. Ne pas hésiter à faire de beaux graphiques grâce aux options *numpoints*, *grid*, *scaling=constrained...*

Nous prendrons comme premier exemple le polynôme P suivant (déjà considéré par Gauss) : $P = X^7 + 28X^4 - 480$.

> P:=X^7+28*X^4-480;

On considérera aussi $A = X^4 - 9X + 18$, $B = X^4 + 5X + 5$, $L_4 = ((1 - X^2)^4)^{(4)}$.

1 Tracé des branches de l'équation $P(z) = 0$

Question 1 : (10 min)

Exprimer $Re(P(z))$ et $Im(P(z))$ en fonction de $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.

Question 2 : (20 min)

Tracer sur un même graphique $Re(P(z)) = 0$ en bleu et $Im(P(z)) = 0$ en rouge. Comment reconnaît-on graphiquement les racines de P ? Faire un zoom sur un point où la situation n'est pas claire.

Question 3 : (3 min)

Ajouter au graphique précédent un cercle en vert de centre O et de rayon au choix (mais pas trop grand quand même) tel que toutes les racines de P soient à l'intérieur du cercle.

2 Expression en coordonnées polaires

Question 4 : (10 min)

Cette question n'est pas essentielle pour la suite. Vous pouvez la passer si vous manquez de temps. Exprimer $Re(P(z))$ et $Im(P(z))$ en coordonnées polaires. On exprimera $Re(P)$ et $Im(P)$ en fonction de r , $\cos t$ et $\sin t$.

Question 5 : (20 min)

Tracer de trois couleurs différentes les surfaces correspondant à $(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(P)$, $(x, y) \mapsto \operatorname{Im}(P)$ et $z = 0$. Il s'agit donc de dessins dans l'espace. (cf. 'plot3d' et ses variations.)

3 Démonstration du théorème

Soient $T = \operatorname{Re}(P)$ et $U = \operatorname{Im}(P)$.

Question 6 :

Quelle propriété sur les courbes de T et U cherche-t-on à montrer ? Vérifier que pour les polynômes ci-dessus, cette propriété est vérifiée. Le vérifier aussi pour quelques polynômes de votre choix.

Question 7 :

Pourquoi les courbes $T = 0$ et $U = 0$ ne sont-elles pas vides ? Pourquoi sont-elles si régulières en dehors d'un grand disque ?

Question 8 :

Regarder l'alternance des courbes $T = 0$ et $U = 0$ sur un grand cercle vert. Que constate-t-on ? Qu'en déduire ? On raisonnera bien sûr par récurrence.

Question 9 :

Comment compter graphiquement le nombre de racines et leur multiplicité ? Quelle est la réponse pour P ?

Question 10 :

Pour les polynômes suivants, déterminer leurs racines (avec multiplicités si possible) et comparer avec les résultats numériques donnés par 'solve'.

- > `P:=diff((1-T^2)^4,T$4);`
- > `P:=numtheory[cyclotomic](k,X);`
- > (éventuellement faire varier k)

Conclusion

Rédiger une quinzaine de lignes résumant la preuve esquissée ci-dessus du théorème fondamental de l'algèbre.