

```
> P:=X^7+28*X^4-480:
```

1 Tracé des branches de l'équation $P(z) = 0$

Question 1 : (10 min)

```
> assume(x, real, y, real):
> Q:=subs(X=x+I*y,P):
> Q:=expand(Q): Q1:=Re(Q): Q2:=Im(Q):
```

Question 2 : (20 min)

```
> D1:=plots[implicitplot](Q1=0, x=-5..5,
> y=-5..5, numpoints=2000, color=blue):
> D2:=plots[implicitplot](Q2=0, x=-5..5, y=-5..5, numpoints=2000,
> color=red):
> display({D1,D2}, axes=box);
```

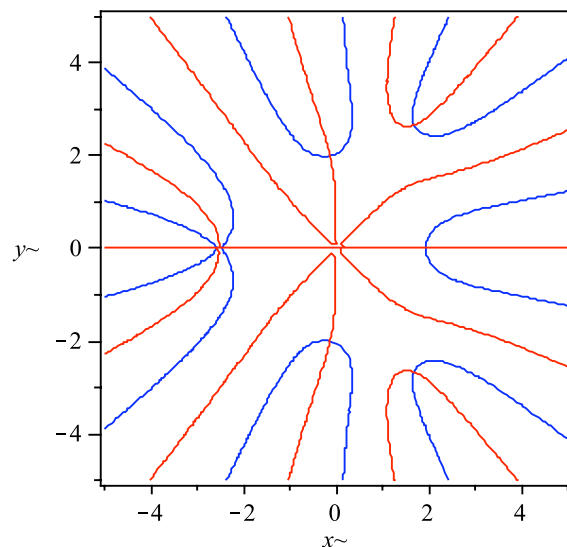


FIG. 1 – Les courbes $Re(P(z)) = 0$ et $Im(P(z)) = 0$.

```
> display( {implicitplot(Q1=0, x=-3..-2,
> y=-1..1, numpoints=2000, color=blue), implicitplot(Q2=0,
> x=-4..-2,
> y=-1..1, numpoints=2000, color=red, title='Un zoom
> sur un point important')}, axes=box);
```

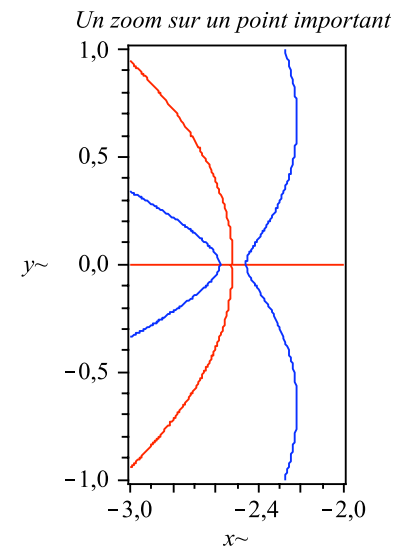


FIG. 2 – Vue d'un détail.

Remarque : la commande `plots[implicitplot]` permet d'utiliser la commande `implicitplot` sans charger toute la bibliothèque `plots`.

Question 3 : (3 min)

```
> C:=plot([4*cos,4*sin,0..2*Pi],
> color=green, numpoints=1000):
> display({C,D1,D2}, scaling=constrained, axes=box);
```

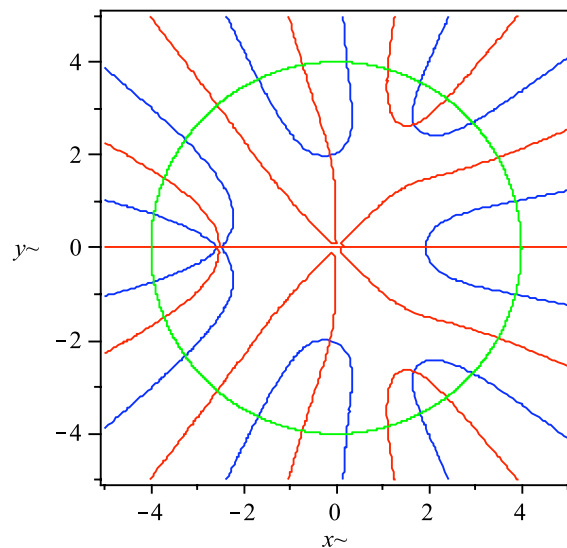


FIG. 3 – Tout se passe dans un disque.

2 Expression en coordonnées polaires

Question 4 : (10 min)

```
> assume(r>0, 0<=t, t<=2*Pi); about(t);
```

```
Originally t, renamed t~:
```

```
is assumed to be: RealRange(0,2*Pi)
```

```
> R:=subs(X=r*cos(t)+I*r*sin(t),P);
```

$$R := (r\tilde{\cos}(t\tilde{)} + Ir\tilde{\sin}(t\tilde{)})^7 + 28(r\tilde{\cos}(t\tilde{)} + Ir\tilde{\sin}(t\tilde{)})^4 - 480$$

```
> R:=expand(R); R1:=sort(Re(R),r); R2:=sort(Im(R),r);
```

$$\begin{aligned} R := & r^{-7} \cos(t\tilde{)}^7 + 7I r^{-7} \cos(t\tilde{)}^6 \sin(t\tilde{)} - 21 r^{-7} \cos(t\tilde{)}^5 \sin(t\tilde{)}^2 \\ & - 35I r^{-7} \cos(t\tilde{)}^4 \sin(t\tilde{)}^3 + 35 r^{-7} \cos(t\tilde{)}^3 \sin(t\tilde{)}^4 + 21I r^{-7} \cos(t\tilde{)}^2 \sin(t\tilde{)}^5 \\ & - 7 r^{-7} \cos(t\tilde{)} \sin(t\tilde{)}^6 - I r^{-7} \sin(t\tilde{)}^7 + 28 r^{-4} \cos(t\tilde{)}^4 \\ & + 112I r^{-4} \cos(t\tilde{)}^3 \sin(t\tilde{)} - 168 r^{-4} \cos(t\tilde{)}^2 \sin(t\tilde{)}^2 - 112I r^{-4} \cos(t\tilde{)} \sin(t\tilde{)}^3 \\ & + 28 r^{-4} \sin(t\tilde{)}^4 - 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R1 := & \cos(t\tilde{)}^7 r^{-7} - 21 \cos(t\tilde{)}^5 \sin(t\tilde{)}^2 r^{-7} + 35 \cos(t\tilde{)}^3 \sin(t\tilde{)}^4 r^{-7} \\ & - 7 \cos(t\tilde{)} \sin(t\tilde{)}^6 r^{-7} + 28 \cos(t\tilde{)}^4 r^{-4} - 168 \cos(t\tilde{)}^2 \sin(t\tilde{)}^2 r^{-4} \\ & + 28 \sin(t\tilde{)}^4 r^{-4} - 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R2 := & 7 \cos(t\tilde{)}^6 \sin(t\tilde{)} r^{-7} - 35 \cos(t\tilde{)}^4 \sin(t\tilde{)}^3 r^{-7} + 21 \cos(t\tilde{)}^2 \sin(t\tilde{)}^5 r^{-7} \\ & - \sin(t\tilde{)}^7 r^{-7} + 112 \cos(t\tilde{)}^3 \sin(t\tilde{)} r^{-4} - 112 \cos(t\tilde{)} \sin(t\tilde{)}^3 r^{-4} \end{aligned}$$

```
> implicitplot(R1, r=0..5, t=0..2*Pi, coords=polar):
> D1:=implicitplot(R1=0, r=0..5, t=-Pi..Pi, grid=[60,60],
color=blue) :
> D2:=implicitplot(R2=0, r=0..5, t=-Pi..Pi, grid=[60,60],
color=red) :
> display({D1,D2}, axes=BOXED, scaling=CONSTRAINED);
```

On représente $\Re(P(z)) = 0$ et $\Im(P(z)) = 0$ en fonction de r et θ , en coordonnées *cartésiennes*. Il est alors plus simple de lire les valeurs de r et θ qui sont respectivement en abscisse et ordonnée.

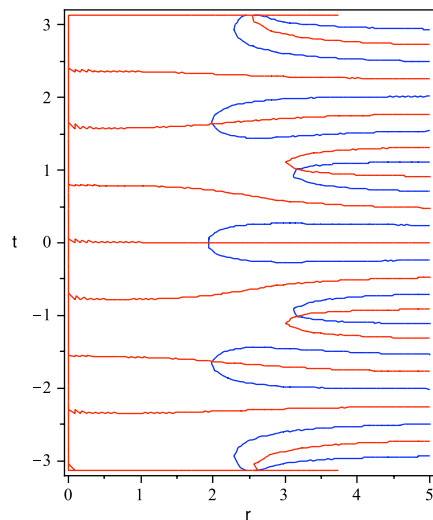
Question 5 : (20 min)

```
> rg:=3 :
> D3:=plot3d(Q1, x=-rg..rg, y=-rg..rg, color=blue, grid=[50,50]):
> D4:=plot3d(Q2, x=-rg..rg, y=-rg..rg, color=red, grid=[50,50]):
> C2:=plot3d(0, x=-rg..rg, y=-rg..rg, color=green, grid=[50,50]):
> display(D3,D4,C2, view=[-rg..rg,-rg..rg,-rg..rg]);
```

3 Démonstration du théorème

Question 6 :

On cherche à montrer qu'une courbe bleue coupe toujours une courbe rouge. On alors l'existence d'un $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(P(z)) = \Im(P(z)) = 0$, i.e. $P(z) = 0$.

FIG. 4 – r et θ en coordonnées cartésiennes**Question 7 :**

Parce que lorsque r est grand, $Re(P(z))$ et $Im(P(z))$ se comportent respectivement à peu près comme $r^n \cos(nt)$ et $r^n \sin(nt)$, et ces expressions changent de signe, donc s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. Plus précisément, pour r grand, $Re(P(re^{it})) = r^n(\cos(nt) + o(1))$ et $Im(P(re^{it})) = r^n(\sin(nt) + o(1))$ où le $o(1)$ est à comprendre lorsque r tend vers $+\infty$.

Or $\cos(nt)$ s'annule pour t congru à $\pi/2n$ modulo π/n . Or la courbe d'équation polaire $\rho = r^n \cos(n\theta)$ est la réunion des droites d'angles polaires $\pi/2n$ modulo π/n . D'où la magnifique étoile observée. De même $r^n \sin(nt) = 0$ est la réunion des droites d'angles polaires 0 modulo π/n .

Question 8 :

L'alternance est expliquée par la question précédente. On admet qu'une courbe (par exemple bleue) qui entre dans le disque vert va en ressortir. C'est clair sur tous nos exemples, mais de là à le prouver... On raisonne ensuite en prenant la courbe dont les

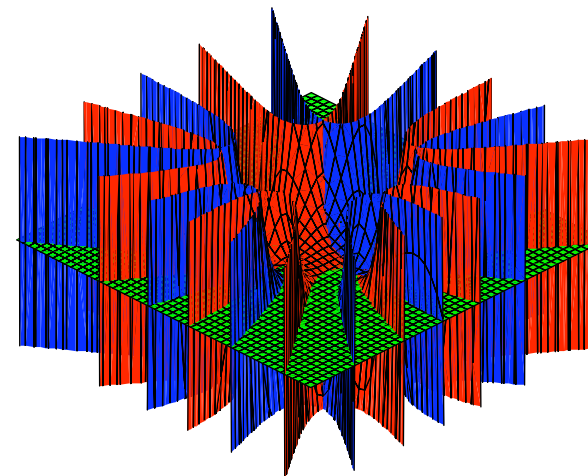


FIG. 5 – Une interprétation en 3 dimensions du théorème fondamental de l'algèbre.

points d'entrée et de sortie font un angle minimal. Par symétrie, supposons qu'elle soit bleue. Entre les deux extrémités, il y a un point rouge, relié à un autre point rouge. Comme l'angle entre ces deux points rouges est au moins égal à celui entre les points bleus, une courbe rouge coupe une courbe bleue.

Question 9 :

Compter le nombre de point d'intersection de courbes rouges et bleues. La multiplicité est le nombre de courbes bleues (et rouges) qui arrivent à la racine.

Conclusion

Bravo Herrn Karl Friedrich Gauss.