

Théorie classique de la calculabilité

Antonin Delpéuch

18 janvier 2013

- On a défini la classe des ensembles (d'entiers) calculables ;
- Certains ensembles ne le sont pas, par exemple $\{ \langle \mathcal{M} \rangle, \mathcal{M}(\langle \mathcal{M} \rangle) \text{ ne s'arrête pas} \}$.

On voudrait un ordre pour comparer la difficulté de calcul des ensembles.

- ① Trouver un ordre
- ② Étudier les propriétés de cet ordre
- ③ Répondre au problème de Post

On dispose déjà de la relation d'ordre \leq_m (*many to one*) :

$$A \leq_m B \Leftrightarrow (\exists f, x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$$

avec f calculable (donc totale).

On dispose déjà de la relation d'ordre \leq_m (*many to one*) :

$$A \leq_m B \Leftrightarrow (\exists f, x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$$

avec f calculable (donc totale).

Algorithme

Entrée : x

Calculer $f(x)$;

Tester si $f(x) \in B$ et renvoyer le résultat.

Posons $\emptyset' = \{x, \Phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{\emptyset'}$ son complémentaire.

Posons $\emptyset' = \{x, \Phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{\emptyset'}$ son complémentaire.

On a $\overline{\emptyset'} \not\leq \emptyset'$: en effet, comme \emptyset' est récursivement énumérable, $\overline{\emptyset'} \leq \emptyset' \Rightarrow \overline{\emptyset'}$ récursivement énumérable

Posons $\emptyset' = \{x, \Phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{\emptyset'}$ son complémentaire.

On a $\overline{\emptyset'} \not\leq \emptyset'$: en effet, comme \emptyset' est récursivement énumérable, $\overline{\emptyset'} \leq \emptyset' \Rightarrow \overline{\emptyset'}$ récursivement énumérable $\Rightarrow \emptyset'$ récursif, absurde.

Posons $\emptyset' = \{x, \Phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{\emptyset'}$ son complémentaire.

On a $\overline{\emptyset'} \not\leq \emptyset'$: en effet, comme \emptyset' est récursivement énumérable, $\overline{\emptyset'} \leq \emptyset' \Rightarrow \overline{\emptyset'}$ récursivement énumérable $\Rightarrow \emptyset'$ récursif, absurde.

Pourtant, connaissant un ensemble A , il est simple de calculer l'ensemble \overline{A} . On voudrait donc une réduction plus générale.

Posons $\emptyset' = \{x, \Phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{\emptyset'}$ son complémentaire.

On a $\overline{\emptyset'} \not\leq \emptyset'$: en effet, comme \emptyset' est récursivement énumérable, $\overline{\emptyset'} \leq \emptyset' \Rightarrow \overline{\emptyset'}$ récursivement énumérable $\Rightarrow \emptyset'$ récursif, absurde.

Pourtant, connaissant un ensemble A , il est simple de calculer l'ensemble \overline{A} . On voudrait donc une réduction plus générale.

Une machine de Turing à oracle est une machine de Turing munie d'une bande supplémentaire, qui est initialisée avec un ensemble arbitraire A .

Une machine de Turing à oracle est une machine de Turing munie d'une bande supplémentaire, qui est initialisée avec un ensemble arbitraire A .

Exemple



Une machine de Turing à oracle est une machine de Turing munie d'une bande supplémentaire, qui est initialisée avec un ensemble arbitraire A .

Exemple

Pour l'ensemble $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$:

0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

On note $A \leq_T B$ quand il existe une machine à oracle qui, avec l'oracle B , calcule A .

C'est plus général que \leq_m :

$$A \leq_m B \Rightarrow A \leq_T B$$

En effet, si $f : A \rightarrow B$ est calculable et telle que $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$, alors on peut construire une machine à oracle qui sur l'entrée x calcule $n = f(x)$ et qui renvoie le n -ième bit de l'oracle.

Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.

Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.

Ham.

Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.

Ham. Bis.

Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.

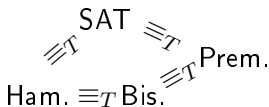
Ham. \equiv_T Bis.

Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.

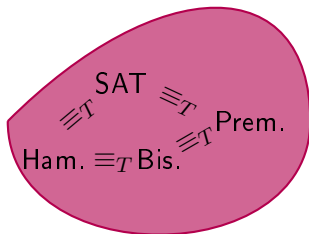


Un *degré de Turing* est une classe d'ensembles indistinguables pour la relation \leq_T , c'est à dire une classe d'équivalence pour la relation

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

On note \mathbf{A} le degré de Turing de l'ensemble A .

Les degrés héritent de l'ordre \leq_T : $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{B}$ s'il existe A_0 (resp. B_0) de degrés \mathbf{A} (resp. \mathbf{B}) tels que $A_0 \leq_T B_0$.



Pour tout ensemble A on note A' l'ensemble des codes de machines à oracle qui, avec l'oracle A , terminent sur leur propre code.

$$A' = \{i, \Phi_i^A(i) \downarrow\}$$

Pour tout ensemble A on note A' l'ensemble des codes de machines à oracle qui, avec l'oracle A , terminent sur leur propre code.

$$A' = \{i, \Phi_i^A(i) \downarrow\}$$

On peut reformuler le théorème d'indécidabilité du problème de l'arrêt :

$$\emptyset <_T \emptyset'$$

Pour tout ensemble A on note A' l'ensemble des codes de machines à oracle qui, avec l'oracle A , terminent sur leur propre code.

$$A' = \{i, \Phi_i^A(i) \downarrow\}$$

On peut reformuler le théorème d'indécidabilité du problème de l'arrêt :

$$\emptyset <_T \emptyset'$$

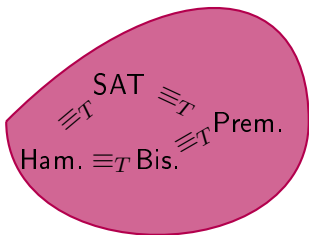
En faisant la même preuve avec des machines à oracle, on obtient que pour tout ensemble A ,

$$A <_T A'$$

Cette définition passe aux degrés :

$$A' = A'$$

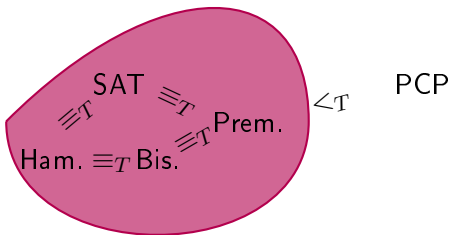
car si $A \equiv_T B$, alors $A' \equiv_T B'$.



Cette définition passe aux degrés :

$$A' = A'$$

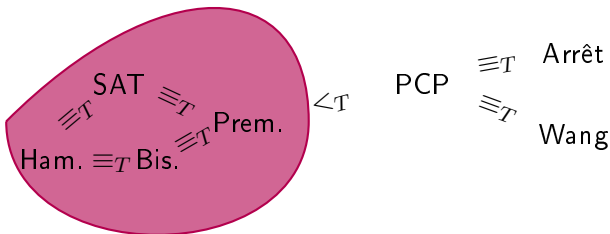
car si $A \equiv_T B$, alors $A' \equiv_T B'$.



Cette définition passe aux degrés :

$$A' = A'$$

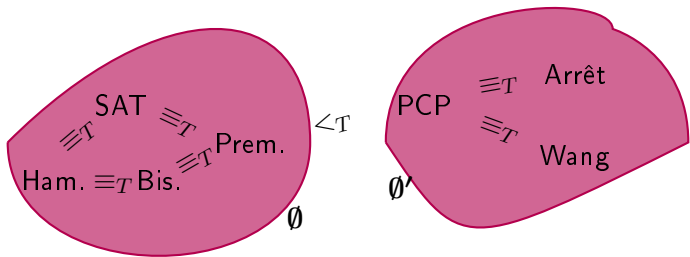
car si $A \equiv_T B$, alors $A' \equiv_T B'$.



Cette définition passe aux degrés :

$$A' = A'$$

car si $A \equiv_T B$, alors $A' \equiv_T B'$.



Jusque là, on connaît ces degrés de Turing :

$$\emptyset < \emptyset' < \emptyset'' < \dots < \emptyset^{(n)} < \dots$$

Jusque là, on connaît ces degrés de Turing :

$$\emptyset < \emptyset' < \emptyset'' < \dots < \emptyset^{(n)} < \dots$$

Problème de Post

Existe-t-il un degré de Turing \mathbf{a} tel que $\emptyset < \mathbf{a} < \emptyset'$?

Théorème (Friedberg, Muchnik)

Il existe deux ensembles récursivement énumérables A et B dont les degrés de Turing sont incomparables.

Théorème (Friedberg, Muchnik)

Il existe deux ensembles récursivement énumérables A et B dont les degrés de Turing sont incomparables.

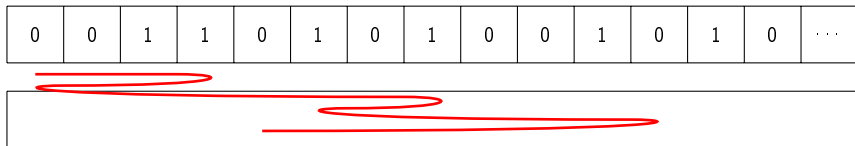
Ce théorème répond au problème de Post (car A r.e. $\Rightarrow A \leq_T \emptyset'$).

Soient x, y et A tels que $\Phi_x^A(y) \downarrow$. On définit l'*utilisation* de Φ_x^A sur y , notée $\varphi_x^A(y)$: c'est le plus grand indice d'une case de la bande d'oracle lue par la machine.

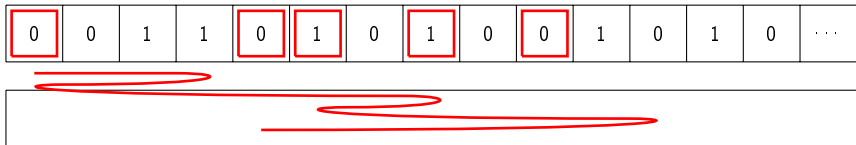
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

--

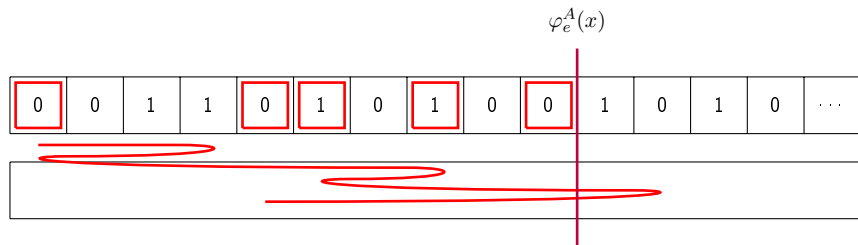
Soient x, y et A tels que $\Phi_x^A(y) \downarrow$. On définit l'*utilisation* de Φ_x^A sur y , notée $\varphi_x^A(y)$: c'est le plus grand indice d'une case de la bande d'oracle lue par la machine.



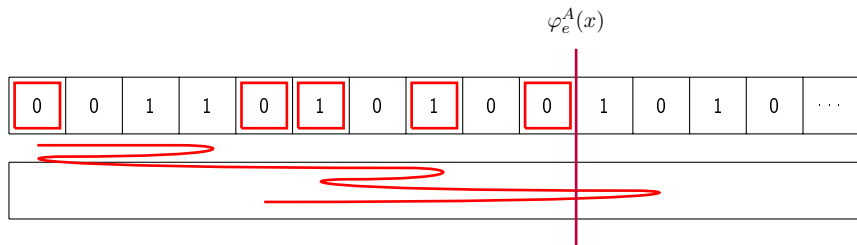
Soient x, y et A tels que $\Phi_x^A(y) \downarrow$. On définit l'*utilisation* de Φ_x^A sur y , notée $\varphi_x^A(y)$: c'est le plus grand indice d'une case de la bande d'oracle lue par la machine.



Soient x, y et A tels que $\Phi_x^A(y) \downarrow$. On définit l'*utilisation* de Φ_x^A sur y , notée $\varphi_x^A(y)$: c'est le plus grand indice d'une case de la bande d'oracle lue par la machine.



Soient x, y et A tels que $\Phi_x^A(y) \downarrow$. On définit l'*utilisation* de Φ_x^A sur y , notée $\varphi_x^A(y)$: c'est le plus grand indice d'une case de la bande d'oracle lue par la machine.



Use principle

Si A et B coïncident sur les $\varphi_x^A(y)$ premiers bits, alors $\Phi_x^A(y) = \Phi_x^B(y)$.

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B par étapes : A_s est l'ensemble A à l'étape s , et on pose $A = \cup_s A_s$ (de même pour B).

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B par étapes : A_s est l'ensemble A à l'étape s , et on pose $A = \cup_s A_s$ (de même pour B).

\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7 \mathcal{R}_8 \mathcal{R}_9 \mathcal{R}_{10} \dots

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B par étapes : A_s est l'ensemble A à l'étape s , et on pose $A = \cup_s A_s$ (de même pour B).

\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7 \mathcal{R}_8 \mathcal{R}_9 \mathcal{R}_{10} \dots

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B par étapes : A_s est l'ensemble A à l'étape s , et on pose $A = \cup_s A_s$ (de même pour B).

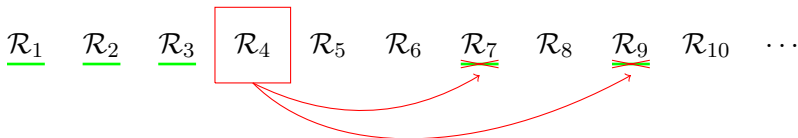
\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7 \mathcal{R}_8 \mathcal{R}_9 \mathcal{R}_{10} \dots

On construit A et B tels que pour tout e , $\Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$ et $\Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$.

$$\mathcal{R}_{2e} : \Phi_e^A \neq \mathbb{1}_B$$

$$\mathcal{R}_{2e+1} : \Phi_e^B \neq \mathbb{1}_A$$

On construit A et B par étapes : A_s est l'ensemble A à l'étape s , et on pose $A = \cup_s A_s$ (de même pour B).



À l'étape s de la construction, on dit que \mathcal{R}_{2e} a un témoin valide x quand on a trouvé x tel que $\Phi_e^A(x)[s] \neq \mathbb{1}_{B_s}(x)$ et symétriquement pour \mathcal{R}_{2e+1} .

À l'étape s de la construction, on dit que \mathcal{R}_{2e} a un témoin valide x quand on a trouvé x tel que $\Phi_e^A(x)[s] \neq \mathbb{1}_{B_s}(x)$ et symétriquement pour \mathcal{R}_{2e+1} .

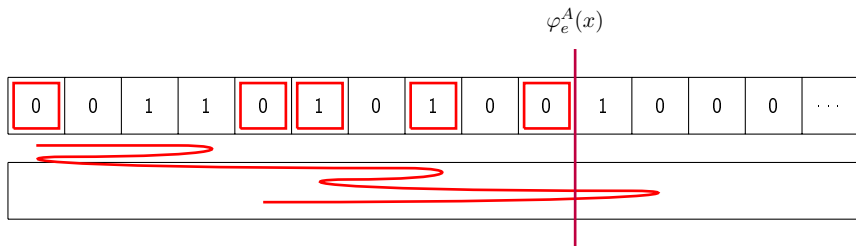
Construction

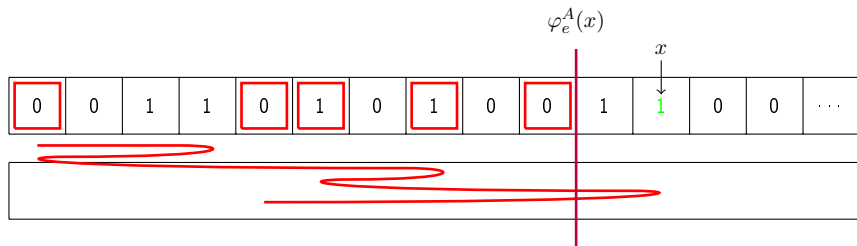
À l'étape s , trouver le plus petit j tel que :

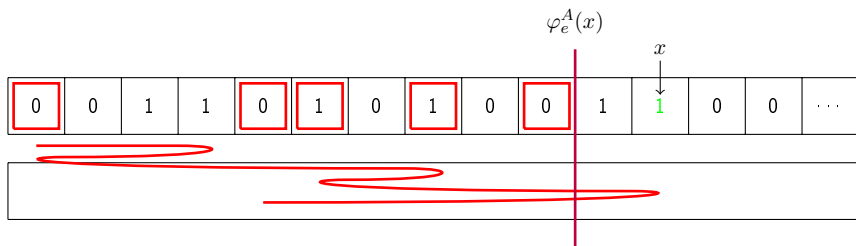
- ① On n'a pas encore de témoin pour \mathcal{R}_j .
- ② Le témoin qu'on a est invalide à l'étape s :
 $\Phi_e^A(x)[s] \downarrow = 0 = \mathbb{1}_{B_s}(x)$ dans le cas où $j = 2e$, et
 $\Phi_e^B(x)[s] \downarrow = 0 = \mathbb{1}_{A_s}(x)$ si $j = 2e + 1$.

Dans le cas 1 : affecter à \mathcal{R}_j un nouveau témoin x assez grand. Par exemple si $j = 2e$, x est plus grand que tout $\varphi_f^B(x_f)$ pour $2f + 1 < 2e$ et différent des autres témoins des \mathcal{R}_{2k} .

Dans le cas 2 : mettre x dans B_{s+1} et supprimer tous les témoins des $\mathcal{R}_k, k > j$.







Comme x est assez grand, les \mathcal{R}_j plus prioritaires ne sont pas affectés par le changement dans A .

On a utilisé une méthode classique dans ce domaine : *finite injury priority method*.

On peut l'utiliser pour étudier d'autres aspects des degrés de Turing.

On a utilisé une méthode classique dans ce domaine : *finite injury priority method*.

On peut l'utiliser pour étudier d'autres aspects des degrés de Turing.

Questions ?